7/1/2020

Στόχος: εξαγωγή ρητών τύπων για την κυμ. εξ. (Π.Α.Τ) στον (ολόκληρο) $\mathbb{R}^n$ για $n=2$ και $n=3$.

Χρησιμοποιούμε την λύση του ΠΑΣΤ στην ημιευθεία ($n=1$)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & , \text{ στο } \mathbb{R}_+ := (0,\infty)\times(0,\infty) \\ u=g,\ u_t = h & , \text{ στο } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \text{ (αρχικές τιμές)} \\ u=0 & , \text{ στο } \{0\}\times(0,\infty) \text{ (συνορ. ")} \end{cases}$$

με $g \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+})$, $h \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+})$

$h(0) = g(0) = 0$, $g''(0) = 0$ (συνθήκες συμβατότητος)

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy, & x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2}[g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)\,dy, & 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Δηλαδή θέλουμε τον τύπο για την $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ που λύνει το ΠΑΤ

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & , \text{ στο } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & , \text{ στο } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases} \quad \boxed{\text{για } n = 2,3}$$

Στρατηγική: Θεωρούμε <u>σφαιρικές μέσες τιμές</u> για <u>σταθερό</u> $x \in \mathbb{R}^n$.

$$U(r,t) := U(x;r,t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,dS(y)$$

(μέση τιμή της u πάνω στην σφαίρα

$\partial B(x,r))$ για $r>0$, $t>0$.

Αντίστοιχα: $G(r) := G(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} g(y)\, dS(y)$

$H(r) := H(x;r) := \fint_{\partial B(x,r)} h(y)\, dS(y)$.

Παρατήρηση: $\underbrace{u(x;0,t)}_{} = U(0,t) = u(x,t)$ A(: απόδ. άσκηση Bonus).

$= \lim_{r\to 0} U(x;r,t)$. Αντίστοιχα για G, H.

Τότε: Λήμμα 1 (Evans, p. 70): Για σταθερό $x \in \mathbb{R}^n$ και $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ λύση του (1.1) έχουμε ότι $U \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$ και

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \dfrac{n-1}{r} U_r = 0, & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ U = G, \quad U_t = H, & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \end{cases}$$

(Εξίσωση Euler-Poisson-Darboux).

Απόδειξη: $U(x;r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\, dS(y)$

$\overset{(15)}{\Longrightarrow} U_r(x;r,t) = \dfrac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy$ (Άσκηση)

$\Longrightarrow \lim_{r\to 0^+} u(x;r,t) \left[=: u(x;0,t)\right] = 0$ (Άσκηση)

Επίσης προκύπτει ότι $U_{rr}(x;r,t) =$
(από 15)

$$⨍_{\partial B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dS(y) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) ⨍_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\, dy$$
(Άσκηση)

$\Longrightarrow \lim_{r \to 0^+} U_{rr}(x;r,t) = \frac{1}{n} \Delta u(x,t)$ (Άσκηση)

και $U \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+ \times [0,\infty))$ [Ασκ. super bonus].

Επίσης, από (15): $U_r = \frac{r}{n} ⨍_{B(x,r)} \underbrace{\Delta u}_{= u_{tt} \text{ λόγω της (11)}}\, dy$

$$= \frac{1}{n \cdot \alpha(n)} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt}\, dy \Longrightarrow$$

$(r^{n-1} \cdot U_r)_r = \int_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, ds$ τύπος παραγώγισης

$$= r^{n-1} ⨍_{\partial B(x,r)} u_{tt}\, dS = r^{n-1} U_{tt}$$

[από αυτά προκύπτει ο ισχυρισμός (Ασκ.)]

Άρα, είδαμε: u επιλύει (11) $\Rightarrow$ U επιλύει Euler, Poisson, Darboux (14)

Τώρα εστιάζουμε στο $\boxed{n=3}$ και λέμε $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ λύση της (11). Επιλύει την:

$$(19)\quad \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{rr} = 0 & , \text{στο } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{G} \, , \, \tilde{u}_t = \tilde{H} & , \text{στο } \mathbb{R}_+ \times \{0\} \\ \tilde{u} = 0 & , \text{στο } \{0\} \times (0,\infty) \end{cases}$$

όπου $\tilde{U} := rU$, $\tilde{G} := rG$, $\tilde{H} := rH$

Παρατήρηση: Αυτό είναι το ΠΑΣΤ στην ημιευθεία, που έχουμε ήδη λύση.

Πως προκύπτει το (19);

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} \underset{\substack{(n=3)\\ EPD(14)}}{=} r\left[U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right] = \tilde{U}_{rr}$$

(Ασκ.): $\tilde{U} = rU \Rightarrow \tilde{U}_r = U + rU_r \Rightarrow \tilde{U}_{rr} = 2U_r + rU_{rr}$

Επίσης, $\tilde{G}_{rr}(0) = 0$ (δείξτε και τις άλλες συνθήκες συμβατότητας άσκ.)

Συνεπώς, από τον τύπο για λύση ΠΑΣΤ στην ημιευθεία, προκύπτει: για $0 \le r \le t$:

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{H}(s)\,ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} U(x; r, t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+}\left[\frac{\tilde G(t+r) - \tilde G(t-r)}{2-r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r} \tilde H(s)\,ds\right]$$

$$= \tilde G'(t) + \tilde H(t) \quad \text{Ασκ.}$$

$$= \lim_{2r\to 0^+} \frac{\tilde G(t+2r) - \tilde G(t)}{2r}$$

Όμως, $\tilde G'(t) = \frac{d}{dt}\left(\tilde G(t)\right) = \frac{d}{dt}\, t\cdot G(t) =$

$\frac{d}{dt}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y)\right)$ και $\tilde H(t) = t H(t) =$

$t\fint_{\partial B(x,t)} h(y)\,dS(y) \Rightarrow$

$$\tilde G'(t) = \fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y) + t\frac{d}{dt}\fint_{\partial B(x,t)} g(y)\,dS(y) \quad (*)$$

(ασκ.)

$$(*) = \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\,\frac{y-x}{t}\,dS(y)$$

$\Rightarrow$ Για $\boxed{n=3}$ η λύση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ του (11) (αν υπάρχει) θα πρέπει να έχει την μορφή $u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left(th(y) + g(y) + Dg(y)(y-x)\right) dS(y)$ ← Σημαντικό!

, για $x \in \mathbb{R}^3$, $t>0$

$\boxed{\text{τύπος του Kirchhoff}}$

Αποδεικνύεται (μπορούμε, αν θέλαμε, να το δείξουμε με την τεχνολογία που έχουμε, και είπες) ότι για $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ και $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, πράγματι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο του Kirchhoff επιλύει το ΠΑΤ (11) και $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

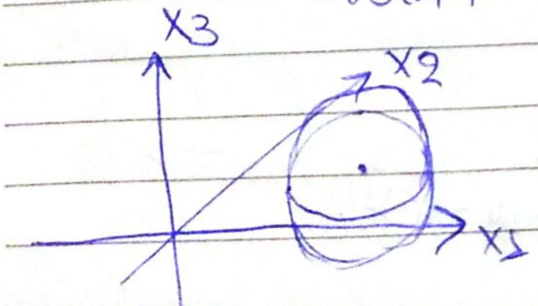
Για να βρούμε αντίστοιχο τύπο για $n=2$, όπως έχουμε για $n=1$ (d'Alembert) και $n=3$ (Kirchhoff) χρησιμοποιούμε τον τύπο του Kirchhoff, μεταφράζοντας το πρόβλημα για $n=2$ σε ένα πρόβλημα για $n=3$ επεκτείνοντας σταθερά το $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^2$ στην τρίτη διάσταση δηλαδή θέτουμε $\boxed{\bar{u}(x, x_3, t) := u(x,t)}$. Τότε η (11) για $n=2$ μεταφράζεται σε
$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ \bar{u} = \bar{g}, \quad \bar{u}_t = \bar{h}, & \text{στο } \mathbb{R}^3 \times \{t=0\} \end{cases}$$

(με $\bar{g}(x,x_3) := g(x)$ και $\bar{h}(x,x_3) := h(x)$) και εφαρμόζουμε Kirchhoff

(σε μία μορφή, πριν την τελική που βγάλαμε)
$$u(x,t) = \bar{u}(x,0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t ⨍_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}\, dS\right) +$$

$$t ⨍_{\partial B(x,0,t)} \bar{h}\, dS$$

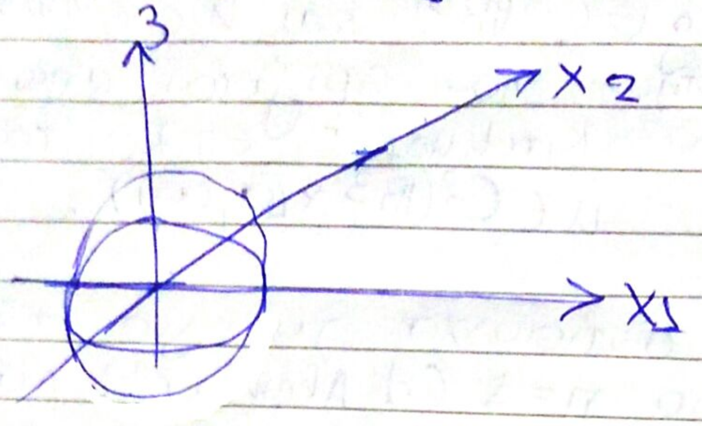
Όμως: $$⨍_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}\, dS = \frac{1}{4\pi t^2} \underbrace{\int_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}\, dS}$$



επιφ. ολοκλ. πάνω από σφαίρα κέντρου $(x,0) \in \mathbb{R}^3$ με $x \in \mathbb{R}^2$.

Ως γνωστόν.

Καλύτερα για $x=0$:



μπορεί να αναπαρασταθεί ως δύο γραφήματα συνάρτησης, δύο μεταβλητών για το άνω και κάτω ημισφαίριο:

$$\gamma(y) = (t^2 - |y-x|^2)^{1/2} \quad , \; y \in B(x,t) \text{ έχει}$$

γράφημα το άνω ημισφαίριο $\partial B(x,0,t) \cap \{x_3 > 0\}$

$$\Big[\partial B(x,0,t) = \{ (y,y_3) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{|(y-x, y_3)|^2}_{= |y-x|^2} = t^2 \}$$

Ευκλ. νόρμα $\mathbb{R}^3$ Ευκλ. νόρμα $\mathbb{R}^2$

$$= \{ (y,y_3) \in \mathbb{R}^3 : y^3 = \pm (t^2 - |y-x|^2)^{1/2} \} \Big]$$

Επιφανειακά, ολοκληρώματα γραφημάτων (βλ. π.χ. Σημ. ΔΑ, ΓΓ)

$$\int_{\partial B(x,0,t)} \bar{g} \, dS = 2 \int_{B(x,t)} g(y) \cdot (1 + |D\gamma(y)|^2)^{1/2} dy$$

[βλ. σχόλιο, αποδ. αργότερα]

$$\phi(y) = \begin{pmatrix} y \\ \phi(y) \end{pmatrix}, \; y \in B(x,t) \text{ είναι παραμετρικοποίηση}$$

επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$]

Επίσης, $(1 + |D\gamma|^2)^{1/2} = \dfrac{t}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} \Rightarrow$

$$\fint_{\partial B(x,0,t)} \bar{g}\, dS = \frac{1}{2\pi t} \int_{\substack{B(x,t) \\ \subset \mathbb{R}^2}} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

$$= \frac{t}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy.$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(t^2 \fint_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy \right)}_{=: A}$$

$$+ \frac{t^2}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy.$$

Όμως, $\dfrac{\partial}{\partial t} A \underset{\text{Ενοτης ασκ.}}{=}$

$$t \fint \frac{g(y) + Dg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}\, dy$$

Και συνεπώς προκύπτει για $\boxed{n=2}$ ο τύπος του Poisson για την λύση του (11):

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{t g(y) + t^2 h(y) + t\, Dg(y) (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}}, \text{ για } x \in \mathbb{R}^2, t > 0$$

Είδαμε ότι ο τύπος του Poisson (για $n=2$) προκύπτει από τον τύπο του Kirchhoff (για $n=3$) (από τις τρεις διαστάσεις «πέφτουμε» στις δύο - μέθοδος «καταβασης» (methods of descents)) Αποδ. και εδώ ότι για $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ η συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο Poisson είναι καλά ορισμένη, $C^2(\mathbb{R}^2\times[0,\infty))$, και επιλύει το ΠΑΤ της κυματικής εξίσωσης.

Παρασκευή 15/11 15.00 μάθημα αποριών.